OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 24.02.2019
CLASA a VII-a
SOLUȚII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunţ subiect 1, autor Traian Preda.

Determinați numerele naturale $\overline{xy}$ și $\overline{abcd}$ știind că: $\sqrt{2019 - a\sqrt{\overline{bcd}}} = a^2\sqrt{\overline{xy}}$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
$2019 - a\sqrt{\overline{bcd}} = a^4\overline{xy}$	1p
$\overline{bcd} = k^2$, $k \in \{10,11,12,....,31\}$	1p
$2019=a(k+a^3\cdot\overline{xy})$, $2019=3\cdot673$	1p
a cifră $\Rightarrow a\in\{1,3\}$, a=1 nu convine $\Rightarrow$ a=3.	1p
$673=27\overline{xy}+k \Rightarrow 27\overline{xy}= 673-k$	1p
$27 \mid 673-k$, $27 \mid 675 \Rightarrow 27 \mid k+2$, $k\in\{10,11,12,....,31\} \Rightarrow k=25 \Rightarrow$	1p
$k^2 = 625 \Rightarrow \overline{abcd}= 3625, \overline{xy}=24$.	1p

Enunţ subiect 2, autor Mihaela Berindeanu, G.M. Nr.4/2018.

Fie x și y numere reale astfel încât $x+y$, $x+y^3$ și $x+y^5$ sunt numere raționale. Arătați că x și y sunt numere raționale.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Dacă $y\in\{0,1,-1\}$, se verifică.	1p
Prin scăderea relațiilor obținem $y^3 - y$ și $y^5 - y^3$ sunt nr.raționale.	1p
Dacă $y\notin\{0,1,-1\}$, atunci $(y^5 - y^3): (y^3 - y) = y^2 =a$ este nr.rațional	1p
$x+y^5 =x+ a^2y$, $x+y^3 =x+ay$ nr.raționale $\Rightarrow$ prin scădere	1p
$a^2y -ay = y(a^2 -a)$ nr.rațional	1p

(a^2 -a) nr.rațional nenul $\Rightarrow$ y nr.rațional	1p
Dar x+y , y nr.raționale $\Rightarrow$ prin scădere x nr.rațional	1p

Enunţ subiect 3, autor Bogdan Georgescu.

ABCD este un paralelogram, punctul E este simetricul lui A față de C iar EF || CD, unde F$\in$ AD. Notăm cu FC $\cap$ BE = {N} și BF $\cap$ AE ={M}.

a) Demonstrați că MN || EF.

b) Aflați raportul dintre aria patrulaterului BMCN și aria paralelogramului ABCD.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) EF || CD , AC=CE $\Rightarrow$ AD=DF	1p
$\frac{BM}{MF}=\frac{BC}{AF}=\frac{1}{2}$	1p
BCFD paralelogram $\Rightarrow$ CN||BO, O centrul paralelogramului ABCD	1p
$\frac{BN}{NE}=\frac{OC}{CE}=\frac{1}{2}\Rightarrow$ MN||AB(R.T.Thales în ΔABE),AB||EF$\Rightarrow$ MN||EF	1p
b) $\frac{CM}{AC}=\frac{1}{3}\Rightarrow$ [BMC]=$\frac{1}{3}$[ABC]=$\frac{1}{6}$[ABCD]	1p
$\frac{BN}{BE}=\frac{1}{3}\Rightarrow$ [BNC]=$\frac{1}{3}$[BCE]=$\frac{1}{3}$[ABC]=$\frac{1}{6}$[ABCD]	1p
[BCMN]=[BMC]+[BNC]=$\frac{1}{6}$[ABCD]+$\frac{1}{6}$[ABCD]=$\frac{1}{3}$[ABCD]	1p

Enunţ subiect 4, autor Traian Preda.

Triunghiul ABC este un triunghi isoscel (AB = AC) cu m($\angle$A)= 36^0, BM este bisectoarea $\angle$ABC, M$\in$(AC) și BN este bisectoarea $\angle$ABM, N$\in$(AM) . Demonstrați că :

a) MC $\equiv$ AN.

b) $\left(\frac{AN}{NM}\right)^2=\frac{AN}{NM}+1$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Datorită unghiurilor ΔBMC isoscel$\Rightarrow$ BM=BC	1p
ΔNBC isoscel $\Rightarrow$ BC = NC	1p
Δ AMBisoscel $\Rightarrow$ BM =AM $\Rightarrow$	1p
AM=BM=BC=NC $\Rightarrow$ AN+NM=NM+MC $\Rightarrow$ AN=MC	1p

b) Din th.bis. în ΔABM $\Rightarrow \frac{AN}{NM} = \frac{AB}{BM} = \frac{AC}{AM} = \frac{2AN+NM}{AN+NM} \Rightarrow$	1p
$AN^2 = AN \cdot NM + NM^2 \;\mid :NM^2 \;\Rightarrow$	1p
$\left(\frac{AN}{NM}\right)^2 = \frac{AN}{NM} + 1$	1p